Développement : Formule sommatoire de Poisson - Application à la fonction de Jacobi

Analyse & Probabilités

Références : - [QUE] Queffélec H., Zuily C., *Analyse pour l'agrégation - Cours et exercices corrigés, 4ème **édition***, Dunod, 2013, p95.
- [EA] El Amrani M., *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels - Niveau M1*, ellipses, 2008, p213.
Pour l'application : [GX] Gourdon X., *Les maths en tête - Analyse, 2ème **édition***, ellipses, 2008, p273.
(L'utilisation des références est à parfaire ici selon vos goûts, mais il y a des éléments qui sont intéressants pour moi dans ces trois références)
Pour les leçons :
- 235 : Problèmes d'interversion de symboles en analyse.
- 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
- 246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.
- 250 : Transformation de Fourier. Applications.

Définition 1. *Coefficients de* Fourier.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application 2π-périodique et intégrable sur $[0; 2\pi]$. Si $n \in \mathbb{Z}$, on définit *son n-ième coefficient de* Fourier $c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t$.

Lemme 1.

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π-périodique. Si sa série de Fourier converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$, alors f est la limite simple de sa série de Fourier.

Preuve : Admis. Une preuve est basée sur le théorème de Fejér : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n(f)$ la n-ième somme partielle de sa série de Fourier et $\sigma_N(f) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S_k(f)$.

Alors $\|\sigma_N(f) - f\|_\infty \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$.
On trouvera les preuves complètes dans [EA] p190-195. □

Définition 2. *Convention de la transformation de* Fourier.

On appelle *transformation de* Fourier l'application $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}) \quad \mathcal{F}(f) = \hat{f} := \xi \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x.$$

Théorème 2. *Formule sommatoire de* Poisson.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$. On suppose que :

$$\exists M > 0 \quad \exists \alpha > 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leqslant \frac{M}{(1+|x|)^\alpha},$$

et que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|$ converge. Alors :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2n\pi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n).$$

Preuve : Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x + 2n\pi).$$

⋆ Étape 1 : Montrons que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
Soit $A > 0$. Montrons que la série de fonctions de la variable x $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x + 2n\pi)$ converge normalement sur $[-A; A]$.

Pour $x \in [-A; A]$ et $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|2n\pi| \geqslant 2A$, i.e. $A \leqslant \pi|n|$, on a, par hypothèse :

$$|f(x+2n\pi)| \leqslant \frac{M}{(1+|x+2n\pi|)^\alpha},$$

avec $1+|x+2n\pi| \geqslant |x+2n\pi| \geqslant 2|n|\pi - |x| \geqslant 2|n|\pi - A \geqslant 2|n|\pi - |n|\pi = |n|\pi$. Donc :

$$|f(x+2n\pi)| \leqslant \frac{M}{(|n|\pi)^\alpha} = \frac{M}{|n|^\alpha \pi^\alpha}.$$

Or, comme $\alpha > 1$, la série de RIEMANN $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ converge, donc $\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{M}{|n|^\alpha \pi^\alpha}$ converge, et elle ne dépend pas de x. Donc $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(\cdot + 2n\pi)$ converge normalement sur $[-A; A]$, pour tout $A > 0$.
F est donc bien définie sur $\mathbb{R}$, et comme f est continue sur $\mathbb{R}$, F l'est également en tant que somme d'une série de fonctions continues qui converge uniformément sur tout segment de la forme $[-A; A]$, avec $A > 0$.
$\star$ Étape 2 : Montrons que F est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} F(x+2\pi) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+2n\pi+2\pi) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+2(n+1)\pi) \\ &\overset{p=n+1}{=} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(x+2p\pi) \\ &= F(x), \end{aligned}$$

et donc F est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.
$\star$ Étape 3 : Calculons le coefficient de FOURIER de F d'indice $m \in \mathbb{Z}$. Comme F est continue sur $\mathbb{R}$, elle l'est en particulier sur l'intervalle $[0; 1]$, sur lequel elle est alors intégrable. $c_m(F)$ est donc bien défini, et on a :

$$\begin{aligned} 2\pi c_m(F) &= \int_0^{2\pi} F(t)e^{-imt}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+2n\pi)e^{-imt}\mathrm{d}t \\ &\overset{\text{CVN}}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(t+2n\pi)e^{-imt}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(t+2n\pi)e^{-im(t+2n\pi)}\mathrm{d}t \\ &\overset{u=t+2n\pi}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{2n\pi}^{2n\pi+1} f(u)e^{-imu}\mathrm{d}u \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-imu}\mathrm{d}u \\ &= \hat{f}(m). \end{aligned}$$

$\star$ Étape 4 : Concluons.
Par l'Étape 3 et par hypothèse, $\sum_{m\in\mathbb{Z}} |c_m(F)| = \frac{1}{2\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(m)|$ converge. Par conséquent, par convergence normale établie dans l'Étape 1 et le lemme admis :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m(F)e^{imx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(m)e^{imx},$$

i.e. :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+2n\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(m)e^{imx},$$

ce qui achève la preuve en prenant $x = 0$. $\square$

Remarque 3.

[1] Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (espace de Schwartz), les hypothèses du théorème sont bien vérifiées, puisque f est à décroissance rapide, tout comme sa transformée de Fourier (qui est aussi dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$). La formule sommatoire de Poisson est donc appliquable à toute fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

[2] Dans la preuve, j'ai pris la convention $\hat{f} : \xi \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x$, ce qui alourdit un peu la formule sommatoire de Poisson. Si on prend la convention $\hat{f} : \xi \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi x\xi}\mathrm{d}x$, on obtient $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)$, ce qui est plus joli. C'est avec cette convention qu'est prouvée la formule dans [QUE], mais en suivant les étapes de la preuve avec le bon point de départ, tout fonctionne. J'ai à cet effet croisé la preuve de cette référence avec celle dans [EA].

Lemme 4. *Transformée de Fourier de la gaussienne.*

Soit $a > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\gamma_a(x) = e^{-ax^2}$. Alors :

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \widehat{\gamma_a}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\gamma_{1/a}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

<u>Preuve :</u> Admis ici. Une preuve peut être trouvée [EA] p156. □

Application 5. *Application à la fonction de scJacobi.*

Soit $\theta : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}.$$

Alors, θ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\theta\left(\frac{1}{x}\right).$$

<u>Preuve :</u> On se fixe $\alpha > 0$. Soit $f : x \longmapsto e^{-\alpha x^2}$. On peut aisément montrer (par croissances comparées) que f vérifie les hypothèses du théorème (on a même $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$).

De plus, pour $n \in \mathbb{Z}$, d'après le lemme, $\hat{f}(n) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{n^2}{4\alpha}}$.
D'après la formule sommatoire de Poisson :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2n\pi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n),$$

et donc, on a montré que :

$$\forall \alpha > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-4\alpha\pi^2 n^2} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{n^2}{4\alpha}}.$$

Soit $x > 0$. On prend $\alpha = \frac{x}{4\pi}$, ce qui donne :

$$\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\pi x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\theta\left(\frac{1}{x}\right),$$

ce qui achève la preuve. □

Remarque 6.

La fonction Θ de Jacobi est la fonction $\Theta : x \longmapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^{n^2}$, et :

$$\forall x > 0 \quad \theta(x) = \Theta(e^{-\pi x}).$$

Le corollaire précédent montre que :

$$\forall x > 0 \quad \Theta(e^{-\pi x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{\pi}{x}},$$

ou encore, avec $\Theta(0) = 1$:

$$\forall y \in]0;1[\quad \Theta(y) = \frac{1}{\sqrt{-\ln(y)}} e^{\frac{\pi}{\ln(y)}} \underset{y \to 1}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{1-y}},$$

grâce à un équivalent de $\ln(y) = \ln(1-(1-y))$, quand $1 - y \to 0$. Cela donne un équivalent de θ en 0 :

$$\theta(x) \underset{x \to 0}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{1 - e^{-\pi x}}} \underset{x \to 0}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{\pi x}} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}.$$